학 년	날 짜	2019 1학기 기말대비 내신특강		강 사	학생명
고 1	6.16	범 위	고등수학(상) 여러 가지부등식~직선의 방정식	김래형T (8-303강의실)	

(정답 및 풀이)

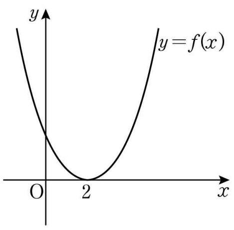
1) 정답 ②

이차함수 $f(x)=x^2-2ax+9a$이고 이차부등식 $f(x)<0$에서 주어진 이차부등식을 만족시키는 해가 없으려면 이차함수 $f(x)=x^2-2ax+9a$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나거나 만나지 않아야 한다. 이차방정식 $x^2-2ax+9a=0$의 판별식을 D라 할 때, $\frac{D}{4}=a^2-9a=a(a-9)\le 0$이므로 $0\le a\le 9$

따라서 정수 a의 개수는 10

2) 정답 ④

(나)에서 이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $x\ne 2$인 모든 실수이므로 이차함수 $f(x)$의 이차항의 계수는 양수이고 곡선 $y=f(x)$는 x축과 점 $(2,\ 0)$에서 접한다.



$f(x)=a(x-2)^2$ $(a>0)$으로 놓으면 (가)에서

$f(0)=a(0-2)^2=4a=8$ $\therefore$ $a=2$

$f(x)=2(x-2)^2$이므로 $f(5)=18$

3) 정답 ①

조건 (가)에 의하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $1+k$, $1-k$ (k는 상수)라 놓을 수 있다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 차가 6이므로

$|1+k-1+k|=6$에서 $k=3$ 또는 $k=-3$

즉, 방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=4$ 또는 $x=-2$

따라서 이차부등식 $f(x)\le 0$의 해는 $-2\le x\le 4$이므로 구하는 모든 정수 x의 값의 합은 $-2+(-1)+0+1+2=3+4=7$ 이다.

4) 정답 185

$(a-1)(a-2)=(b-1)(b-2)$에서

$a^2-3a+2=b^2-3b+2$, $(a+b)(a-b)-3(a-b)=0$

$\therefore$ $(a-b)(a+b-3)=0$

이때 $a<b$이므로 $a+b-3=0$ $\therefore$ $b=3-a$ …… ㉠

한편, $(x-1)(x-2)\le(a-1)(a-2)$에서

$x^2-3x+2\le a^2-3a+2$, $(x+a)(x-a)-3(a-x)\le 0$

$(x-a)(x+a-3)\le 0$ …… ㉡

이때 ㉠에서 $b=3-a$이고 $a<b$이므로

$a<3-a$ $\therefore$ $a<\frac{3}{2}$ …… ㉢

따라서 이차부등식 ㉡의 해는 $a\le x\le 3-a$

이므로 정수 x의 개수는 $(3-a)-a+1=4-2a$

따라서 $4-2a=20$에서 $a=-8$

$a=-8$은 ㉢을 만족시키므로 ㉠에서 $b=3-a=11$

$\therefore$ $a^2+b^2=64+121=185$

5) 정답 ③

주어진 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 $x^2-(k-5)x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-5)^2-4(k-2)\le 0$

$k^2-14k+33\le 0$, $(k-3)(k-11)\le 0$ $\therefore$ $3\le k\le 11$

따라서 구하는 모든 정수 k는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11로 9 개다.

6) 정답 ④

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$(m+2)x^2+2(m-1)x+4>0$ 이 항상 성립하기 위해서는

(i) $m+2>0$에서 $m>-2$

(ii) $(m+2)x^2+2(m-1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-4(m+2)<0$, $m^2-2m+1-4m-8<0$

$m^2-6m-7<0$, $(m+1)(m-7)<0$ $\therefore$ $-1<m<7$

(i), (ii)에 의하여 $-1<m<7$이므로 정수 m의 개수는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6의 7이다.

7) 정답 ⑤

$-x^2+x+3\le x^2+ax+5$에서 $2x^2+(a-1)x+2\ge 0$

위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하여야 하므로

$2x^2+(a-1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

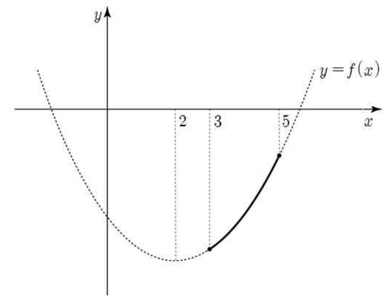
$D=(a-1)^2-4\times 2\times 2\le 0$ $\therefore$ $-3\le a\le 5$

따라서, 구하는 정수 a의 개수는 9이다.

8) 정답 ②

$f(x)=x^2-4x-4k+3$ $(3\le x\le 5)$라 하면

$f(x)=(x-2)^2-4k-1$ $(3\le x\le 5)$ 이다.



그림과 같이 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록이고 대칭축이 $x=2$인 그래프의 일부분이므로 $3\le x\le 5$에서 $f(x)\le 0$이 항상 성립하려면 $f(5)\le 0$ $(\because f(3)<f(5))$ 이어야 한다.

$f(5)=25-20-4k+3=8-4k\le 0$ 이므로 $k\ge 2$ 이다. 따라서 k의 최솟값은 2이다.

9) **정답** ②

$f(x)=x^2-(a+1)x-5$로 놓으면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

$-2 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<0$이 성립해야 하므로 $f(-2)<0$이고 $f(2)<0$이어야 한다.

ⅰ) $f(-2)<0$에서 $4+2(a+1)-5<0$, $2a+1<0$

$\therefore \ a<-\dfrac{1}{2}$

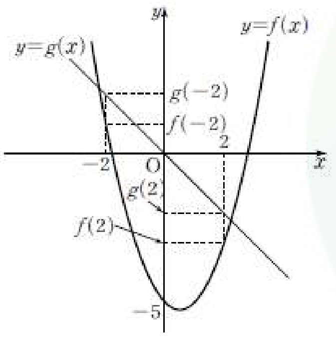
ⅱ) $f(2)<0$에서 $4-2(a+1)-5<0$, $-2a-3<0$

$\therefore \ a>-\dfrac{3}{2}$

ⅰ), ⅱ)에서 $-\dfrac{3}{2}<a<-\dfrac{1}{2}$이므로 구하는 정수 a의 값은 -1이다.

〔다른 풀이〕

$f(x)=x^2-x-5$, $g(x)=ax$라 하자. $-2 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$를 만족시키려면 다음 그림과 같아야한다.



즉, $f(-2)<g(-2)$이고 $f(2)<g(2)$이어야 한다.

10) **정답** ②

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+3x+2 \le mx+n$이므로

$x^2+(m-3)x+n-2 \ge 0$이다.

$x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m-3)^2-4n+8 \le 0$이다.

따라서 $4n \ge m^2-6m+17 \cdots\cdots$ ① 이다.

모든 실수 x에 대하여 $mx+n \le x^2-x+4$이므로

$x^2-(m+1)x+4-n \ge 0$이다.

$x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D'라 하면

$D'=(m+1)^2-16+4n \le 0$이다.

따라서 $4n \le -m^2-2m+15 \cdots\cdots$ ② 이다.

따라서 ①, ②에 의해

$m^2-6m+17 \le 4n \le -m^2-2m+15 \cdots\cdots$ ③

$m^2-6m+17 \le -m^2-2m+15$, $2m^2-4m+2 \le 0$이다.

$2(m-1)^2 \le 0$이므로 $m=1$이고 ③에서 $12 \le 4n \le 12$이므로 $n=3$이다. 따라서 $m^2+n^2=10$이다.

〔참고〕

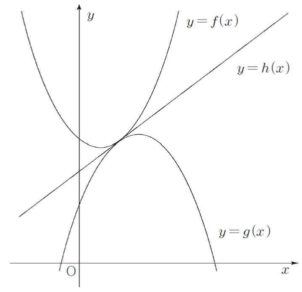
$f(x)=x^2-x+4$, $g(x)=-x^2+3x+2$, $h(x)=mx+n$이라 하면 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \le h(x) \le f(x)$가 성립하면 된다.

$f(x)-g(x)=2x^2-4x+2=2(x-1)^2$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 서로 접한다.

따라서 $g(x) \le h(x) \le f(x)$가 성립하기 위해서는 그림과 같이 $y=h(x)$의 그래프가 $y=g(x)$와 $y=f(x)$의 그래프에 동시에 접해야 한다. 따라서 $f(x)=h(x)$에서

$x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=$



$(m+1)^2-4(4-n)=0 \cdots\cdots$ ① 이다.

$g(x)=h(x)$에서 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D'라 하면

$D'=(m-3)^2-4(n-2)=0 \cdots\cdots$ ②

이다. ①과 ②를 연립하면 $m=1$, $n=3$이므로

$m^2+n^2=10$이다.

11) **정답** 2

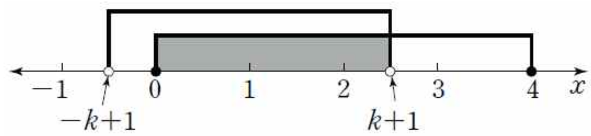
$|x-1|<k$에서 $-k<x-1<k$

$\therefore \ -k+1<x<k+1 \ \cdots\cdots$ ㉠

$x^2-4x \le 0$에서 $x(x-4) \le 0$

$\therefore \ 0 \le x \le 4 \ \cdots\cdots$ ㉡

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이 되도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면



$\therefore \ -1 \le -k+1<0$이고 $2<k+1 \le 3$ $\therefore \ 1<k \le 2$

따라서, 구하는 양수 k의 최댓값은 2이다.

12) **정답** 13

$\overline{AB}=\sqrt{(15-2t)^2+(10-t)^2}=\sqrt{5t^2-80t+325}$

$=\sqrt{5(t-8)^2+5}$

따라서 두 점 A, B사이의 거리는 $t=8$일 때 최솟값 $\sqrt{5}$를 갖는다. $\therefore \ \alpha=8$, $m=\sqrt{5}$ $\therefore \ \alpha+m^2=8+5=13$

13) **정답** 17

두 점 A(4, 5), B(7, -4)의 y좌표의 부호가 다르므로 선분 AB는 x축과 한 점에서 만난다.

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값은 점 P가 선분 AB가 x축과 만나는 점일 때, 최소가 된다. 두 점 $A(4,\ 5)$, $B(7,\ -4)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-5=\dfrac{-4-5}{7-4}(x-4)$

즉, $y=-3x+17$ …… ㉠

이때 점 $P(a,\ 0)$이 직선 ㉠ 위의 점이므로

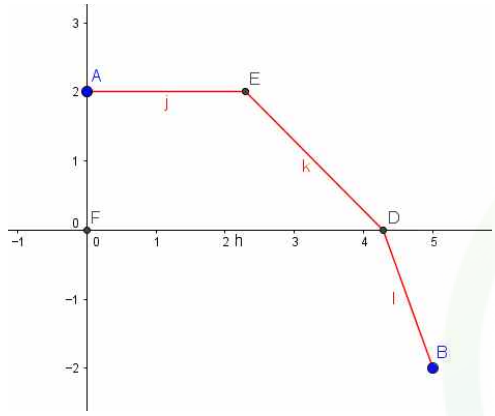
$0=-3a+17$에서 $a=\dfrac{17}{3}$ $\therefore\ 3a=17$

14) ④

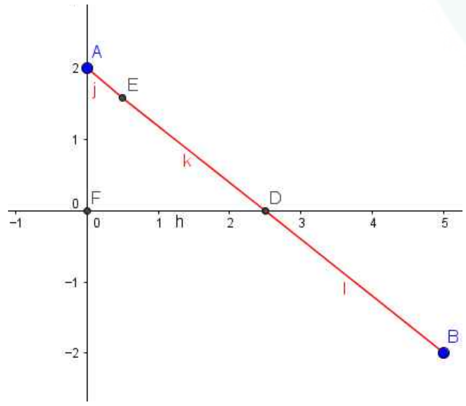
$\sqrt{x^2+y^2-4x-4y+8}$ 을 $(0,2)$ $(x-2,y)$의 두 점 사이의 거리

$\sqrt{4+y^2}$ 을 $(x-2,y)$ $(x,0)$의 두 점 사이의 거리

$\sqrt{x^2-10x+29}$ 을 $(x,0)$ $(5,-2)$사이의 거리



라 생각하면 세 선분이 직선일 경우가 최단거리 이므로 $(0,2)$ $(5,-2)$의 거리인 $\sqrt{41}$ 이 답이다.



15) 정답 10

세 점 A, B, C 의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$이라 하면

$\left(\dfrac{2x_2+x_1}{3},\ \dfrac{2y_2+y_1}{3}\right)=(2,\ 1)$에서

$2x_2+x_1=6,\ 2y_2+y_1=3$ …… ㉠

$\left(\dfrac{2x_3+x_2}{3},\ \dfrac{2y_3+y_2}{3}\right)=(6,\ 5)$에서

$2x_3+x_2=18,\ 2y_3+y_2=15$ …… ㉡

$\left(\dfrac{2x_1+x_3}{3},\ \dfrac{2y_1+y_3}{3}\right)=(4,\ 12)$에서

$2x_1+x_3=12,\ 2y_1+y_3=36$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $x_1+x_2+x_3=12,\ y_1+y_2+y_3=18$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\dfrac{12}{3}=4,\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=\dfrac{18}{3}=6$ 에서 $(4,\ 6)$이다.

$\therefore\ a=4,\ b=6,\ a+b=10$

16) 정답 ④

$2\overline{AP}=3\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$

점 P는 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{3\times9+2\times(-1)}{3+2},\ \dfrac{3\times(-1)+2\times4}{3+2}\right)$, 즉 $(5,\ 1)$이다.

17) 정답 5

$\overline{OA}=4$, $\overline{OB}=3$이고 삼각형 ABO는 $\angle BOA=90^\circ$인 직각삼각형이므로 $\overline{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

따라서 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{OB}:\overline{AB}=\overline{OC}:\overline{AC}=3:5$

이므로 점 C는 선분 OA를 $3:5$로 내분하는 점이다.

따라서 점 C의 x좌표는 $\dfrac{3\times4+5\times0}{3+5}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ p+q=2+3=5$

18) 정답 ①

점 C의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{n+1},\ 0\right)$이고 삼각형 OCB의 무게중심 G의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{n+1},\ \dfrac{4}{3}\right)$이므로

$$\overline{CG}=\sqrt{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{3}{n+1}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-0\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{4}{(n+1)^2}+\frac{16}{9}}=\frac{5}{3}$$

위 식의 양변을 제곱하면 $\dfrac{4}{(n+1)^2}+\dfrac{16}{9}=\dfrac{25}{9}$

$\dfrac{4}{(n+1)^2}=1$

$(n+1)^2=4$ $\therefore\ n=1$ 또는 $n=-3$

따라서 자연수 n의 값은 1이다.

19) 정답 $2\sqrt{33}$

$\overline{BC}$의 중점을 M이라 할 때 $\overline{GM}=2$

이고 중선정리 공식을 이용하면

$\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{GM}^2)$ 이고 $\overline{BM}=\sqrt{33}$

따라서 $\overline{BC}=2\sqrt{33}$

학 년	날 짜	2019 1학기 기말대비 내신특강		강 사	학생명	
고 1	6.16	범 위	고등수학(상) 여러 가지부등식~직선의 방정식	김래형T (8-303강의실)		

20) 정답 ①

좌표평면 위의 두 직선이 서로 만나지 않으려면 두 직선의 기울기가 서로 같고 y 절편이 달라야 한다. 직선 $x+y+3=0$ 의 기울기는 -1 , y 절편은 -3

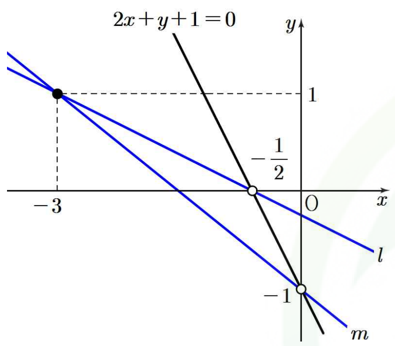
직선 $a^2x+(3-2a)y+3=0$ 의 기울기는 $\dfrac{a^2}{2a-3}$, y 절편은 $\dfrac{3}{2a-3}$ 이므로 $-1=\dfrac{a^2}{2a-3}$ 에서 $a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$ $\therefore$ $a=-3$ 또는 $a=1$

이때, $-3\neq\dfrac{3}{2a-3}$ 이어야 하므로 $a=-3$

21) 정답 ①

[직선의 방정식]



$x+y+1=0$과 3사분면에서 만나려면

$kx+3k+1-y=0 \rightarrow y=k(x+3)+1$에서

k값에 관계없이 항상 $(-3,\ 1)$을 지나고, k는 기울기이다.

$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $(0,\ 1)$을 각각 지날 때 각 축에서 만나므로

직선 l이 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$을 지날 때 $k=-\dfrac{2}{5}$이고

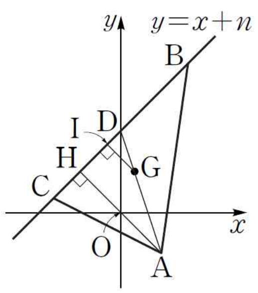
직선 m이 $(0,\ -1)$을 지날 때 $k=-\dfrac{2}{3}$이므로

$\alpha+\beta=-\dfrac{16}{15}$이다

22) 정답 6

삼각형 ABC의 무게중심 G에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 I, 직선 AG가 직선 BC와 만나는 점을 D라 하면 무게중심의 성질에 의하여

$\overline{AD}:\overline{GD}=3:1$이므로 $\overline{AH}:\overline{GI}=3:1$이다. 즉, $\overline{AH}=3\overline{GI}$이므로 $\overline{GI}=2\sqrt{2}$이다.



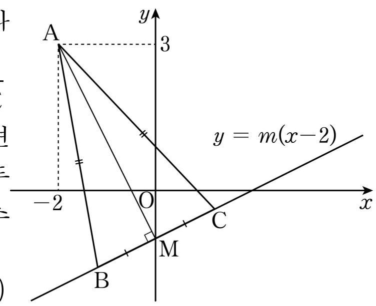
직선 $y=x+n$과 점 $G(1,\ 3)$사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{|1-3+n|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$에서 $|n-2|=4$ $\therefore$ $n=6$ ($\because$ n은 양수)

23) 정답 ③

선분 BC의 중점을 M이라 하자.

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형이고 밑변 BC의 중점이 M이므로 두 선분 AM, BC는 서로 수직이다.



점 M은 직선 $y=m(x-2)$와 y축이 만나는 점이므로 $M(0,\ -2m)$이다.

직선 BC의 기울기는 m이고, 두 점 $A(-2,\ 3)$, $M(0,\ -2m)$에서 (직선 AM의 기울기)$=\dfrac{-2m-3}{0-(-2)}=\dfrac{-2m-3}{2}$

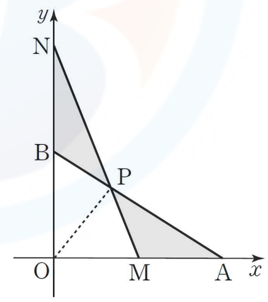
두 직선이 서로 수직일 때 두 직선의 기울기의 곱은 -1이므로

$m\times\dfrac{-2m-3}{2}=-1$, $2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

$m>0$이므로 $m=\dfrac{1}{2}$

24) 정답 ③



$\overline{OM}=\overline{MA}=2$이므로 삼각형 POM과 삼각형 PMA의 넓이는 같다. 사각형 OMPB의 넓이가 삼각형 APM과 삼각형 BPN의 넓이의 합과 같으므로 삼각형 POB과 삼각형 PBN의 넓이는 같다. $\overline{OB}=\overline{BN}=\dfrac{1}{2}\overline{ON}=3$ $\therefore$ $\overline{ON}=6$

따라서 직선 MN의 기울기는 $-\dfrac{\overline{ON}}{\overline{OM}}=-\dfrac{6}{2}=-3$

25) 정답 ⑤

ㄱ. $a=0$일 때, 직선 l의 방정식은 $y=1$이므로 x축에 평행하다 (참)

ㄴ. 직선 l의 방정식을 a에 대하여 정리하면

$a(x+y)+(4y-4)=0$

이 등식이 a의 값에 관계없이 성립하므로 항등식의 성질에 의하여 $x+y=0$, $4y-4=0$

즉, $x=-1$, $y=1$이므로 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다. (참)

ㄷ. 원점 O와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|4|}{\sqrt{a^2+(a+4)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2a^2+8a+16}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소이어야 하므로

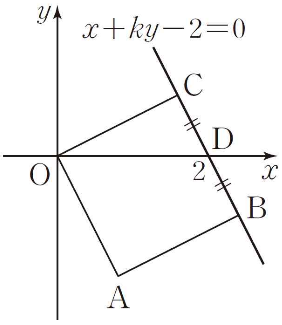
$2a^2+8a+16=2(a+2)^2+8\geq 8$에서 $a=-2$일 때 거리가 최대이다. (참)

〔다른 풀이〕

ㄷ. 직선 $l: a(x+y)+(4y-4)=0$에서 직선 l은 점 $P(-1,\ 1)$을 지나는 직선이다. 원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 길이가 최대가 될 때는 직선 OP가 직선 l에 수직일 때, 즉 직선 l의 기울기가 1일 때이다.

$\frac{-a}{a+4}=1 \quad \therefore \quad a=-2$

26) 정답 ④



직선 $x+ky-2=0$ 은 k 의 값에 관계없이 $D(2,\ 0)$ 을 지난다.

정사각형 $OABC$ 의 한 변의 길이를 A 라 하면 삼각형 ODC 에서 $\overline{OC}=a$, $\overline{CD}=\frac{a}{2}$, $\overline{OD}=2$ 이고 $\angle OCD=90^\circ$ 이므로

$$a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=2^2,\ a=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

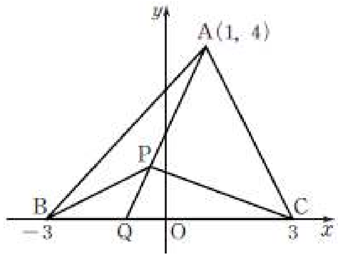
따라서 원점과 직선 $x+ky-2=0$ 사이의 거리가 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+k^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}},\ 4k^2+4=5,\ 4k^2=1$$

이때 k 는 양수이므로 $k=\frac{1}{2}$

27) 정답 ①

직선 AP와 x축의 교점을 Q라 하자.



$\triangle PAB=\frac{1}{2}\times\triangle PCA$이고

$\triangle PBQ:\triangle PQC=\triangle PAB:\triangle PCA=1:2$

이므로 점 Q는 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이다.

$\therefore$ Q($\boxed{(가)\ -1}$, 0)

또, $\triangle PBQ:\triangle PQC=1:2$이므로 $\triangle PQC=2\times\triangle PBQ$

$\triangle PBC=3\times\triangle PBQ$

그런데 $\frac{1}{2}\times\triangle PAB=\frac{1}{3}\times\triangle PBC$이므로

$\triangle PAB=\frac{2}{3}\times\triangle PBC=\frac{2}{3}\times3\times\triangle PBQ=\boxed{(나)\ 2}\times\triangle PBQ$

이다. 따라서 $\triangle PAB:\triangle PBQ=2:1$이므로

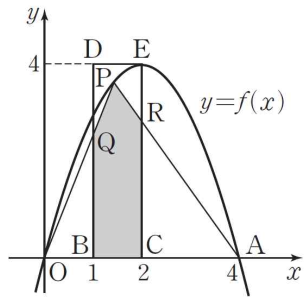
점 P는 선분 AQ를 $2:1$로 내분하는 점이다

$\therefore \quad P\left(\frac{2\times(-1)+1\times1}{2+1},\ \frac{2\times0+1\times4}{2+1}\right)$

따라서 점 P의 x좌표는 $\boxed{(다)\ -\frac{1}{3}}$이고, y좌표는 $\boxed{(라)\ \frac{4}{3}}$이다.

$\therefore \quad a+b+c+d=-1+2+\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{3}=2$

28) 정답 ④



두 점 O, A의 좌표는 $(0,\ 0)$, $(4,\ 0)$이다.

선분 OP와 선분 BD가 만나는 점을 Q, 선분 AP와 선분 CE가 만나는 점을 R이라 하자.

점 P의 좌표가 $(t,\ -t^2+4t)\ (1\leq t\leq 2)$이므로 직선 OP의 방정식이 $y=(-t+4)x$이고, $D(1,\ 4)$에서 점 Q의 x좌표도 1이므로 점 Q의 좌표는 $(1,\ -t+4)$이다.

직선 AP의 방정식이 $y=-t(x-4)$이고, $E(2,\ 4)$에서 점 R의 x좌표도 2이므로 점 R의 좌표는 $(2,\ 2t)$이다.

사각형 BCED와 삼각형 OAP의 공통부분의 넓이는

($\triangle OAP$의 넓이$-\triangle OBQ$의 넓이$-\triangle CAR$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times4\times t(4-t)-\frac{1}{2}\times1\times(4-t)-\frac{1}{2}\times2\times2t$

$=(-2t^2+8t)-\left(2-\dfrac{t}{2}\right)-2t$

$=-2t^2+\dfrac{13}{2}t-2=-2\left(t^2-\dfrac{13}{4}t\right)-2$

$=-2\left(t-\dfrac{13}{8}\right)^2+2\times\left(\dfrac{13}{8}\right)^2-2$

따라서 공통부분의 넓이를 최대로 하는 점 P의 x좌표는 $\dfrac{13}{8}$이다.

29) 정답 243

조건 (나)에서 두 함수 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 그래프가 오직 한 점 $(1,\ 9)$에서 만나므로 방정식 $h_1(x)=h_2(x)$의 실근은 $x=1$ 하나뿐이다. 따라서 방정식 $f(x)-g(x)=f(x)+g(x)$

$g(x)=0$이 중근 $x=1$을 갖는다.

이차함수 $g(x)$의 이차항의 계수가 1이므로

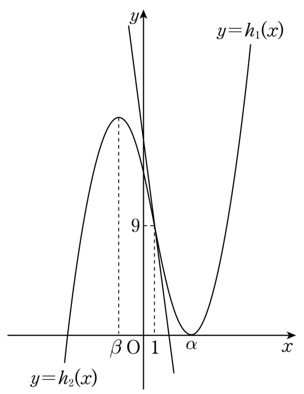
$g(x)=(x-1)^2$ ……㉠ 이다.

함수 $h_1(x)$의 이차항의 계수는 1이고 조건 (가)에 의하여 함수 $y=h_1(x)$의 그래프가 x축에 접한다.

또, 조건 (다)에 의하여 함수 $y=h_1(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 가지므로 $h_1(x)=(x-\alpha)^2$ 이다. 이때 $h_1(1)=9$이므로

$9=(1-\alpha)^2$, $\alpha=-2$ 또는 $\alpha=4$

조건 (다)에 의하여 함수 $y=h_2(x)$는 $x=\beta$에서 최댓값을 가지고 $\alpha>\beta$이므로 이 조건을 만족하는 두 함수 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $\alpha=4$이다.

$h_1(x)=(x-4)^2$이므로 ㉠에 의하여

$f(x)=h_1(x)-g(x)=(x-4)^2-(x-1)^2=-6x+15$ ……㉡

이다. ㉠, ㉡에 의하여

$h_2(x)=f(x)-g(x)=(-6x+15)-(x-1)^2=-x^2-4x+14$

$=-(x+2)^2+18$이다.

이때 함수 $y=h_2(x)$는 $x=\beta$에서 최댓값을 가지므로 $\beta=-2$ 이다. $f(\beta)=f(-2)=-6\times(-2)+15=27$

$g(\alpha)=g(4)=(4-1)^2=9$ 이므로 $f(\beta)\times g(\alpha)=27\times 9=243$

30) 정답 ①

$x^2-a^2x=x(x-a^2)\ge 0$ 에서 $x\le 0$ 또는 $x\ge a^2$이고

$x^2-4ax+4a^2-1=(x-(2a-1))(x-(2a+1))<0$

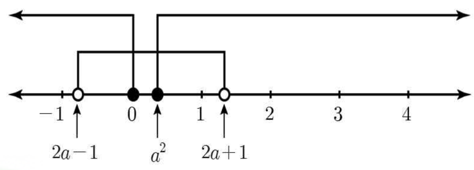
에서 $2a-1<x<2a+1$ 이다.

i) $0<a<\dfrac{1}{2}$일 때 연립부등식의 해는

$-1<2a-1<x\le 0$ 또는 $a^2\le x<2a+1<2$

인데 $0<a^2<\dfrac{1}{4}$이고 $1<2a+1<2$이므로

$x=0,\ 1$의 2개 정수해가 존재한다.



ii) $a=\dfrac{1}{2}$일 때 연립부등식의 해는

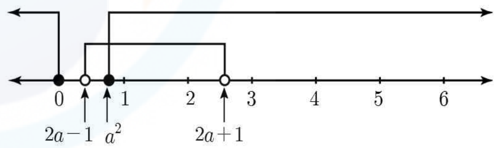
$\dfrac{1}{4}=a^2\le x<2a+1=2$

이므로 $x=1$의 1개 정수해가 존재한다.

iii) $\dfrac{1}{2}<a<1$일 때 연립부등식의 해는 $a^2\le x<2a+1$

인데 $\dfrac{1}{4}<a^2<1$이고 $2<2a+1<3$이므로

$x=1,\ 2$의 2개 정수해가 존재한다.



iv) $a=1$일 때 연립부등식의 해는

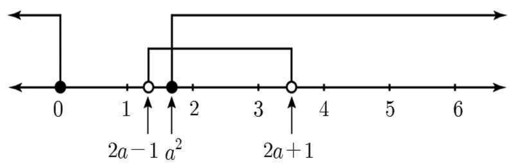
$1=a^2=2a-1<x<2a+1=3$

이므로 $x=2$의 1개 정수해가 존재한다.

v) $1<a<\sqrt{2}$일 때 연립부등식의 해는 $a^2\le x<2a+1$

인데 $1<a^2<2$이고 $3<2a+1<1+2\sqrt{2}<4$이므로

$x=2,\ 3$의 2개 정수해가 존재한다.



그러므로 i) ~ v)에 의해 $a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$일 때, 1개 정수해가 존재한다.

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $\dfrac{3}{2}$이다.

31) 정답 ①

점 $\mathrm{D}(0,\ 0)$, 점 $\mathrm{B}(-1,\ 0)$, 점 $\mathrm{C}(1,\ 0)$, 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$라 하면

$\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\sqrt{7}$ 이므로

$(a+1)^2+b^2=(2\sqrt{3})^2$, $a^2+b^2=(\sqrt{7})^2$ 을 연립하여 풀면 점 A 의 좌표는 $(2,\ \sqrt{3})$

$\overline{AC}=2$ 이므로 삼각형 ABC 는 이등변삼각형이다. 이등변삼각형의 성질에 의해 선분 CE 는 선분 AB 의 수직이등분선이다. 따라서 $\overline{CE}=1$ 이고 점 P 는 삼각형 ABC 의 무게중심이다.

$\overline{AP}:\overline{PD}=2:1$ 이므로 $\overline{AP}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$, $\overline{PD}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$\overline{CP}:\overline{PE}=2:1$ 이므로 $\overline{CP}=\dfrac{2}{3}$, $\overline{PE}=\dfrac{1}{3}$

삼각형 EPA 에서 선분 PR 이 각 APE 의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{PA}:\overline{PE}=\overline{AR}:\overline{ER}=2\sqrt{7}:1$

삼각형 ABC 의 넓이를 S라 하면 삼각형 EPA 의 넓이는 삼각형 ABC 의 넓이의 $\dfrac{1}{6}$ 이므로 $S_1=S\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2\sqrt{7}+1}$

같은 방법으로 삼각형 CPD 에서 $\overline{PD}:\overline{PC}=\overline{DQ}:\overline{CQ}=\sqrt{7}:2$

삼각형 CPD 의 넓이는 삼각형 ABC 의 넓이의 $\dfrac{1}{6}$ 이므로

$S_2=S\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{\sqrt{7}+2}$, $\dfrac{S_2}{S_1}=8-2\sqrt{7}$ 이므로 $a=8$, $b=-2$

따라서 $ab=-16$

〔참고〕

점 D 가 선분 BC 의 중점이므로 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)$이 성립한다. 따라서 $\overline{AC}=2$ 이고 삼각형 ABC 는 이등변삼각형이다.

32) **정답** ④

직선 AD 의 기울기는 $\dfrac{4-0}{1-3}=-2$

직선 BC 의 기울기는 $\dfrac{6-0}{3-6}=-2$

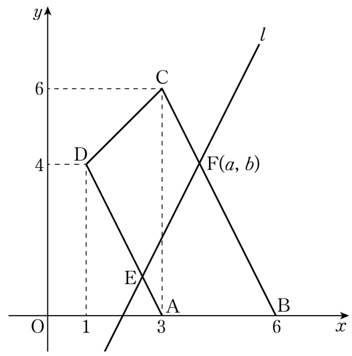
에서 두 직선 AD, BC 는 평행이므로 사각형 ABCD 는 사다리꼴이다.

두 밑변의 길이가 각각 a, b이고 높이가 h인 사다리꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times(a+b)\times h$

이다. 직선 l이 사다리꼴 ABCD 의 넓이를 이등분하려면 나누어진 두 개의 사다리꼴의 두 밑변의 길이의 합이 서로 같아야 한다.

선분 AD 를 $1:3$ 으로 내분하는 점을 E 라 하고 점 E 를 지나는 직선 l이 사다리꼴 ABCD 의 넓이를 이등분할 때, 선분 BC 와 만나는 점 F 에 대하여 점 F 가 선분 BC 를 $m:n$ 으로 내분한다고 하자. $\overline{AD}=2\sqrt{5}$, $\overline{BC}=3\sqrt{5}$ 이고



$\overline{AE}+\overline{BF}=\overline{DE}+\overline{CF}$ 이므로

$\dfrac{1}{4}\times2\sqrt{5}+\dfrac{m}{m+n}\times3\sqrt{5}$

$=\dfrac{3}{4}\times2\sqrt{5}+\dfrac{n}{m+n}\times3\sqrt{5}$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{3m}{m+n}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3n}{m+n}$

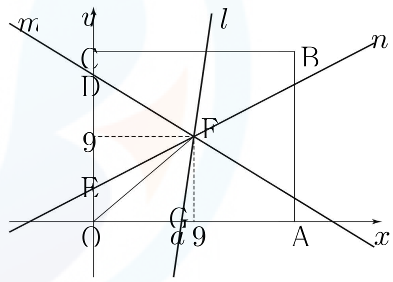
$\dfrac{3(m-n)}{m+n}=1$ 에서 $3m-3n=m+n$, $2m=4n$, $m=2n$

따라서 $m:n=2:1$ 이므로 점 F 의 좌표는

$F\left(\dfrac{2\times3+1\times6}{3},\ \dfrac{2\times6+1\times0}{3}\right)$ 에서 $F(4,\ 4)$이다.

따라서 $a=4$, $b=4$ 이므로 $a+b=8$

33) **정답** 106



직선 m, n이 y축과 만나는 점을 각각 D, E라 하고 점 $(9,\ 9)$를 F라 하자. 정사각형 OABC의 넓이가 324이므로 삼각형 DEF의 넓이는 54 $\therefore\ \overline{DE}=12$

직선 l이 x축과 만나는 점을 G라 하면 사각형 OGFE의 넓이 54는 삼각형 OGF와 삼각형 OEF의 넓이의 합과 같으므로 $\overline{OE}+\overline{OG}=12$이다.

$\overline{OG}=a$이므로 $\overline{OE}=12-a$, $\overline{OD}=24-a$

$\therefore\ D(0,\ 24-a)$, $E(0,\ 12-a)$

직선 m은 두 점 D, F를 지나므로

직선 m의 기울기는 $\dfrac{a-15}{9}$

직선 n은 두 점 E, F를 지나므로

직선 n의 기울기는 $\dfrac{a-3}{9}$

두 직선 m과 n의 기울기의 곱은 $\dfrac{a-15}{9}\times\dfrac{a-3}{9}$ 이므로

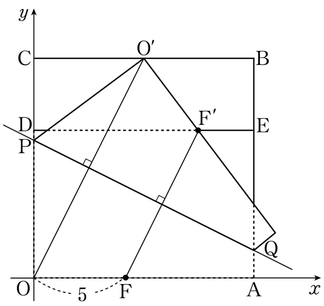
$\dfrac{1}{81}(a^2-18a+45)=\dfrac{1}{81}(a-9)^2-\dfrac{4}{9}$

$6 \le a \le 10$이므로 $a=6$일 때 최댓값 $-\dfrac{1}{3}$

$a=9$일 때 최솟값 $-\dfrac{4}{9}$를 갖는다. $\therefore\ \alpha=-\dfrac{1}{3},\ \beta=-\dfrac{4}{9}$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=\dfrac{25}{81}$이므로 $p+q=106$

34) **정답** ⑤



좌표평면 위의 점 O, A, B, C, F의 좌표는 각각 $(0,\ 0)$, $(12,\ 0)$, $(12,\ 12)$, $(0,\ 12)$, $(5,\ 0)$이다. 점 $\mathrm{O'}$은 선분 BC 위의 점이므로 점 $\mathrm{O'}$의 좌표를 $(a,\ 12)$로 놓을 수 있다.

또 점 $\mathrm{F'}$은 선분 DE 위의 점이고, 두 점 D, E는 각각 두 선분 OC, AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 $\mathrm{F'}$의 좌표를 $(b,\ 8)$로 놓을 수 있다. 직선 $\mathrm{OO'}$과 직선 $\mathrm{FF'}$은 모두 직선 PQ와 수직이므로 직선 $\mathrm{OO'}$과 직선 $\mathrm{FF'}$은 서로 평행하다.

따라서 두 직선의 기울기가 같으므로 $\dfrac{12-0}{a-0}=\dfrac{8-0}{b-5}$

$2a=3b-15$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{\mathrm{O'F'}}=\overline{\mathrm{OF}}=5$이므로 $\sqrt{(b-a)^2+(8-12)^2}=5$

$(b-a)^2=9$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 $0\le a\le 12$, $0\le b\le 12$의 범위에서 해를 구하면 $a=6$, $b=9$

직선 PQ는 선분 $\mathrm{OO'}$의 중점 $(3,\ 6)$과 선분 $\mathrm{FF'}$의 중점 $(7,\ 4)$를 지나는 직선이므로 직선 PQ의 방정식은

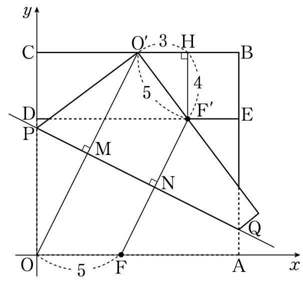
$y=\dfrac{6-4}{3-7}(x-3)+6=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{2}$

따라서 $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{15}{2}$이므로 $m+n=7$

[다른 풀이]

좌표평면 위의 점 O, A, B, C, F의 좌표는 각각 $(0,\ 0)$, $(12,\ 0)$, $(12,\ 12)$, $(0,\ 12)$, $(5,\ 0)$이다.

점 $\mathrm{O'}$은 선분 BC 위의 점이므로 점 $\mathrm{O'}$의 좌표를 $(a,\ 12)$로 놓을 수 있다.



$\overline{\mathrm{O'F'}}=\overline{\mathrm{OF}}=5$이고 $\overline{\mathrm{HF'}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{O'H}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O'F'}}^2-\overline{\mathrm{HF'}}^2}=3$

따라서 점 $\mathrm{F'}$의 좌표를 $(a+3,\ 8)$로 놓을 수 있다.

선분 $\mathrm{OO'}$의 중점을 M, 선분 $\mathrm{FF'}$의 중점을 N이라 하면

$\mathrm{M}\left(\dfrac{a}{2},\ 6\right)$, $\mathrm{N}\left(\dfrac{a+8}{2},\ 4\right)$

이고, 두 점 M, N은 직선 PQ 위의 점이므로

직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{4-6}{\dfrac{a+8}{2}-\dfrac{a}{2}}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

직선 $\mathrm{OO'}$과 직선 PQ는 수직이므로 직선 $\mathrm{OO'}$의 기울기는 2이다. $\dfrac{12-0}{a-0}=\dfrac{12}{a}=2$, $a=6$이므로 $\mathrm{M}(3,\ 6)$

따라서 직선 PQ의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}(x-3)+6$

$=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{2}$

따라서 $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{15}{2}$이므로 $m+n=7$

35) ④

$x<y<z$라 하면

$1<\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{3}{x} \Rightarrow 1<\dfrac{3}{x} \Rightarrow x<3$

$x,\ y,\ z$가 1보다 큰 자연수이므로

$\therefore\ x=2$

또한, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}>1$,

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}<\dfrac{2}{y} \Rightarrow \dfrac{2}{y}>\dfrac{1}{2} \Rightarrow y<4$

$x<y$이므로

$\therefore\ y=3$

또한, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{z}>1 \Rightarrow \dfrac{1}{z}>\dfrac{1}{6} \Rightarrow z<6$

$y<z$이므로

$\therefore\ z=4$ or 5

따라서, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{31}{30}$